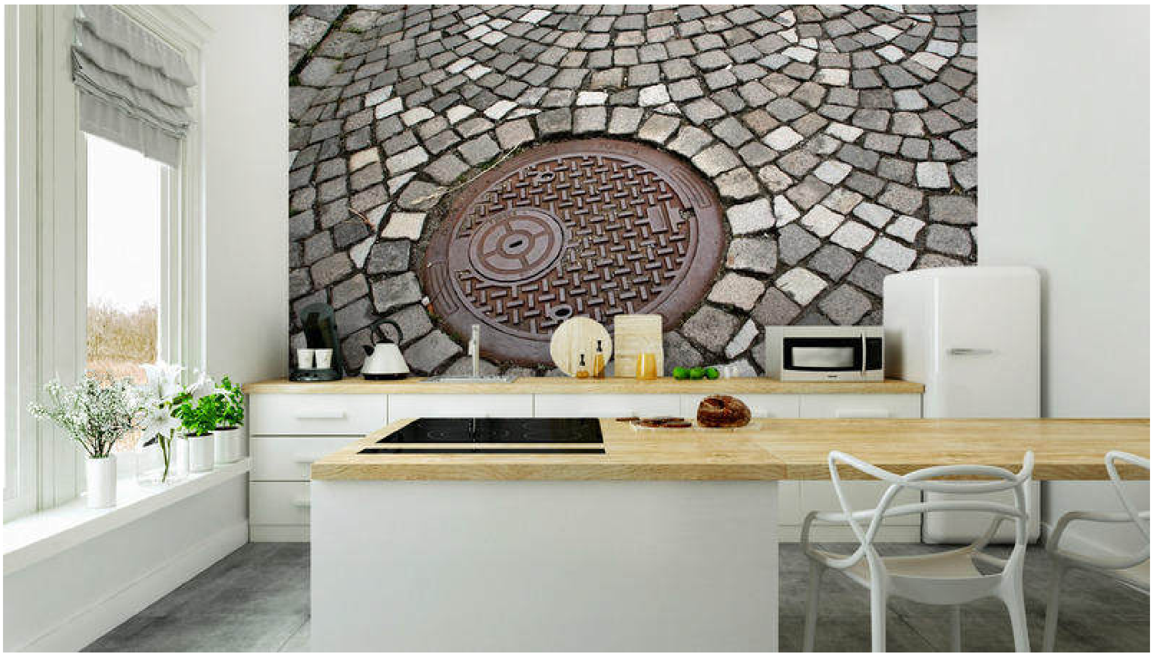


(Decoración domestica con una tapa del grupo p4g)

Simetrías en las tapas de fundición con teselaciones periódicas

Ángel Requena Fraile

Las tapas de registro en hierro fundido de los distintos suministros urbanos tienen un especial atractivo. Muchos fotógrafos y diseñadores han prestado la debida atención al modesto objeto. Decoran vestidos y hasta las viviendas como puede verse en la foto inicial. No es algo que nos deje indiferentes.

Para la educación matemática es un objeto de contemplación y estudio por sus variadas regularidades. Las tapas circulares tan habituales del alcantarillado presentan a veces simetrías de rotación pero aquí nos vamos a dedicar solo a las tapas que contienen teselaciones periódicas del plano en su limitada superficie.

De los 17 grupos posibles de teselado periódico del plano vamos a mostrar que en las tapas de fundición encontraremos al menos 13.

Los diecisiete grupos de teselaciones periódicas del plano

A finales del siglo XIX, el matemático ruso Fedorov (1891) sistematizó los grupos cristalográficos que aplicados al plano reducen a diecisiete las posibles teselaciones periódicas del plano desde el punto de vista de sus simetrías. Más tarde el húngaro-americano Pólya reprodujo los resultados.

Los movimientos que definen el tipo de simetría son las traslaciones, los giros, las reflexiones y las reflexiones deslizantes. La traslaciones están incluidas al observar la periodicidad. Cinco son los giros posibles para las teselaciones periódicas: orden 1 (vuelta completa, 360º) orden 2 (media vuelta, 180º) orden 3 (tercio de vuelta, 120º) orden 4 (cuarto de vuelta, 90º) y orden 6 (sexto de vuelta, 60º). Las reflexiones vienen dadas por sus ejes de simetría que hacen de espejos. Los ejes de reflexión deslizante actúan como espejo tras una traslación con deslizamiento sobre el propio eje.

La nomenclatura que vamos a usar es la de la Unión Internacional de Cristalografía (IUCr) que se inicia con **p** (en 15 casos) y con **c** (los otros dos), sigue el número de orden del giro, y se termina con **m** (*mirror*) si tiene ejes de simetría y/o **g** (*glide*) si tiene ejes deslizantes. Así **p2mg** será una simetría con giros de 180º un eje simetría especular y uno deslizante. Por redundancia se suele suprimir el 2 y queda **pmg**.

Un desarrollo detallado y sencillo de la teoría, con numerosos ejemplos, se puede encontrar el artículo ***Wallpaper group*** de la edición inglesa de la *Wikipedia*.

No hemos encontrado ninguna de los tres grupos de orden 3 aunque hay varios diseños con ángulos de 120º que se acercan. Veremos como el **p31m** está incluido prácticamente pero termina perdiéndose por la colocación. Tampoco hemos localizado la rotación de orden 4 sin simetrías de reflexión.

Veamos los ejemplos:

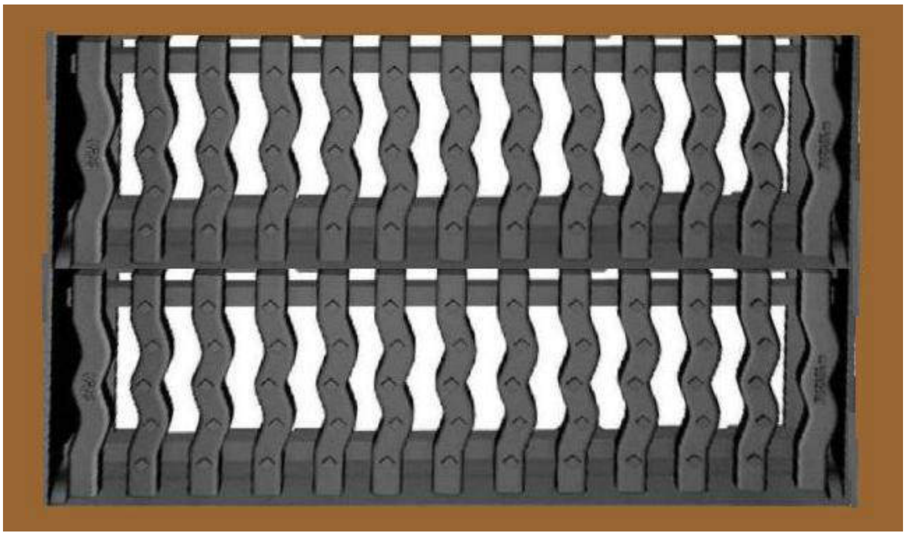
Grupo p1

(Tapa del grupo **p1**)

Solo traslaciones, sin centros de giro privilegiados ni ejes de simetría. Si en lugar de una L y una I, hubiera sido una U tendríamos un grupo **pm.**

Grupo pm

Existe un reflexión sobre un eje de simetría y todos los paralelos de la estructura periódica.

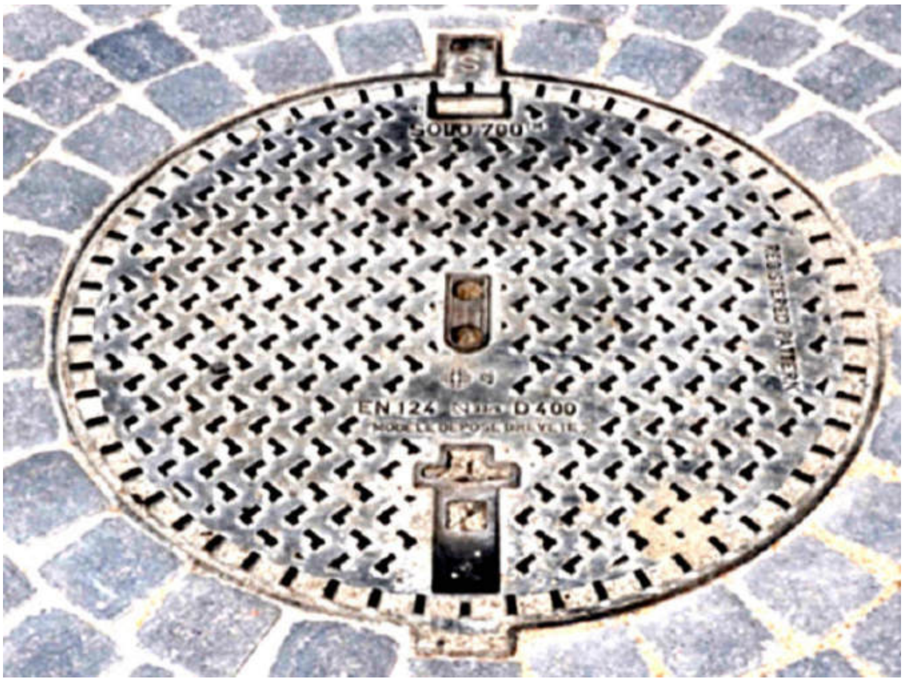


(Tapa del grupo **pm**)

En el ejemplo el eje de simetría es horizontal pasa por el centro y otro y otro por la separación.

Grupo pg

Existe un reflexión deslizante sobre un eje y todos los paralelos de la estructura periódica. En el ejemplo son verticales, formando 45º con las eles.



(Tapa del grupo **pg**)

Grupo cm

Existe un reflexión con eje de simetría y paralelo un eje deslizante. Y todos los paralelos de la estructura periódica. En el ejemplo los ejes de simetría especular son los líneas diagonales a 45º que unen los vértices de los catetos. Los ejes deslizantes son paralelos a ellos a mitad de distancia.

(Alcorque de Zaragoza con grupo **cm**)

Grupo p2

(Tapa del grupo **p2**)

Existen centros de giros de 180º. Si tomamos un cuadradito cualquiera, ceda base o primitiva, los centros de giro son los cuatro vértices, el centro y los cuatro centros de los lados del cuadrado. No existe simetría de reflexión.

Grupo pmm

(Tapa del grupo **pmm**)

Teselación muy sencilla. Cada rectángulo pequeño es una celda que se repite. Hay centros de giro de 180º y reflexiones tanto en ejes horizontal como verticales.

Grupo pmg

(Tapa de Atenas. Grupo **pmg**)

Los ejes de reflexión siguen el palo largo de la T y los deslizantes son perpendiculares, entre los dos sombreros de la T. Los centros de giro de orden 2 se localizan con facilidad.

Grupo pgg

(Tapa del grupo **pgg**)

Los centros de giro de orden 2 y la periodicidad es fácil de ver. Menos sencillo es ver los ejes deslizantes que van según las dos diagonales.

Grupo cmm

(Tapa del grupo **cmm**)

El grupo cmm adopta aquí su estructura más sencilla, a base de rombos, sus diagonales son ejes de reflexión, sus centros son de giro de orden 2 y los ejes deslizantes son paralelos a los de reflexión en su mitad.

Grupo p4m

(Tapa del grupo **p4m**)

Los giros de orden 4, de 90º, y los ejes de simetría llevan la dirección de lados y las diagonales. En la tapa de ejemplo están hasta marcados la mitad de los centros.

El grupo simetría p4m es el más habitual en la azulejería, pero en las tapas se ven muchos del tipo siguiente, el p4g.

Grupo p4g

(Tapa del grupo **p4g**. Praga)

El grupo p4g tiene centros de giro de orden 4 y ejes de simetría perpendiculares como el p4m. La manera más fácil de distinguirlos es que en el p4g los ejes de simetría especular no pasan por los centros de giro de orden 4.

Grupo p6

Mostramos una bonita tapa vista en Santiago de Compostela que no posee ejes de simetría pero si giros de orden 6. Además responde a la ilusión óptica de los cubos. Si no estuviera rayada tendría reflexiones y sería del grupo siguiente, el p6m.

(Tapa del grupo **p6**. Santiago de Compostela)

Grupo p6m

(Tapa del grupo **p6m**. Nueva York)

La estructura hexagonal permite los giros de orden 6 y existen ejes de simetría que forman ángulos de 120º.

Terminamos con otra tapa p6m que con pequeños cambios correspondería al grupo de simetría **p31m**, bastaría con no contraponer simétricamente las Y griegas.

(Tapa del grupo **p6m**)